Méthodes et Conseils

Logarithmes et Exponentielles :

Comment étudier des fonctions et résoudre des équations avec Log et exp :

- Avant d'effectuer tout calcul concernant les Logarithmes, il faut déterminer les sous-ensembles de IR sur lesquels on va travailler.

- Ne pas confondre Log x et x : x doit être strictement positif alors que **Log x** peut être un réel négatif : Log (0, 5) < 0. Il faut retenir que :

Log x > 0 équivaut à : x > 1 et que :

Log x < 0 équivaut à : 0 < x < 1.

- La fonction $x \to \text{Log } x$ a pour dérivée pour x > 0 la fonction $x \to \frac{1}{x}$, mais,**ne pas en déduire** que la fonction $x \to \text{Log}(u(x))$ a pour dérivée : $x \to \frac{1}{u(x)}$.

Pour éviter toute ambiguïté, utiliser systématiquement la formule condensée : (Log o u)' = $\frac{u'(x)}{u(x)}$ pour $u(x) = x$ on retrouve bien $\frac{1}{x}$.

- Rappelons que pour l'étude de fonctions, il faut:

  - Préciser le signe de la fonction dérivée avant de dresser le tableau de variations.
  - Justifier les calculs des limites et donner les asymptotes s'il y a lieu.

- Dans toute équation du type : $(\text{Log } x)^2 + \text{Log } x - 2 = 0$, il est habituel de poser : Log x = X , pour x > 0 afin de se ramener à la résolution d'une équation connue.

- Ne pas confondre $(\text{Log } x)^2$ et $\text{Log } x^2$.

- L'équivalence : $\begin{cases} \text{Log } a = \text{Log } b \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} a = b \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$

traduit le fait que la fonction Log est une bijection de] 0,+∞[dans IR.

- L'équivalence : $\begin{cases} \text{Log } a > \text{Log } b \\ \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} a > b \\ \end{cases}$

$a > 0$, $b > 0$ $\qquad\qquad$ $a > 0$, $b > 0$

traduit le fait que la fonction Log est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Des remarques de même type que les précédentes se trouvent pour la fonction exponentielle.

• La méthode suivie lors de la résolution d'équation faisant intervenir des exponentielles (e^x, e^{-x}, e^{2x},…) consiste à poser

$X = e^x$ et à se ramener ensuite à la résolution de certaines équation connues.

On utilise alors l'équivalence $\begin{cases} e^x = a \\ x \in IR \end{cases}$ si et seulement si $\begin{cases} x = \text{Log } a \\ a > 0 \end{cases}$

Attention : l'équation $e^x = -2$ n'a pas de solution ;

l'équation $\begin{cases} \text{Log } x = -2 \\ x > 0 \end{cases}$; a pour solution $x = e^{-2}$.

• La fonction dérivée de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$, mais le fait que la fonction dérivée soit égale à la fonction donnée ne s'applique pas au cas $x \mapsto a^x$, si $a \neq e$ .Afin d'éviter toute erreur, comme pour la fonction Log, utiliser systématiquement : $x \mapsto e^{u(x)}$ a pour fonction dérivée la fonction : $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$.

• L'équivalence : $e^a = e^b$ si et seulement si $a = b$; traduit le fait que la fonction exp est une bijection de IR dans $]0,+\infty[$.

• L'équivalence : $e^a > e^b$ si et seulement si $a > b$ traduit le fait que la fonction exp est une fonction strictement croissante sur IR.

Attention : • e^{-2} a un sens alors que $e^x = -2$ n'admet pas de Solutions.

• $a^x = e^{x \text{ Log } a}$ pour $a > 0$.

• Les seuls résultats (limites, croissances, …) à retenir sont ceux du cours. Toute autre formule nécessaire pour résoudre un exercice doit être démontrer.

• Il est très utile de mémoriser l'allure des courbes associées aux fonctions **Log** et **exp**.

▌Comment déterminer les limites des fonctions Log et exp :

• On utilise, **seulement**, les limites données au cours.

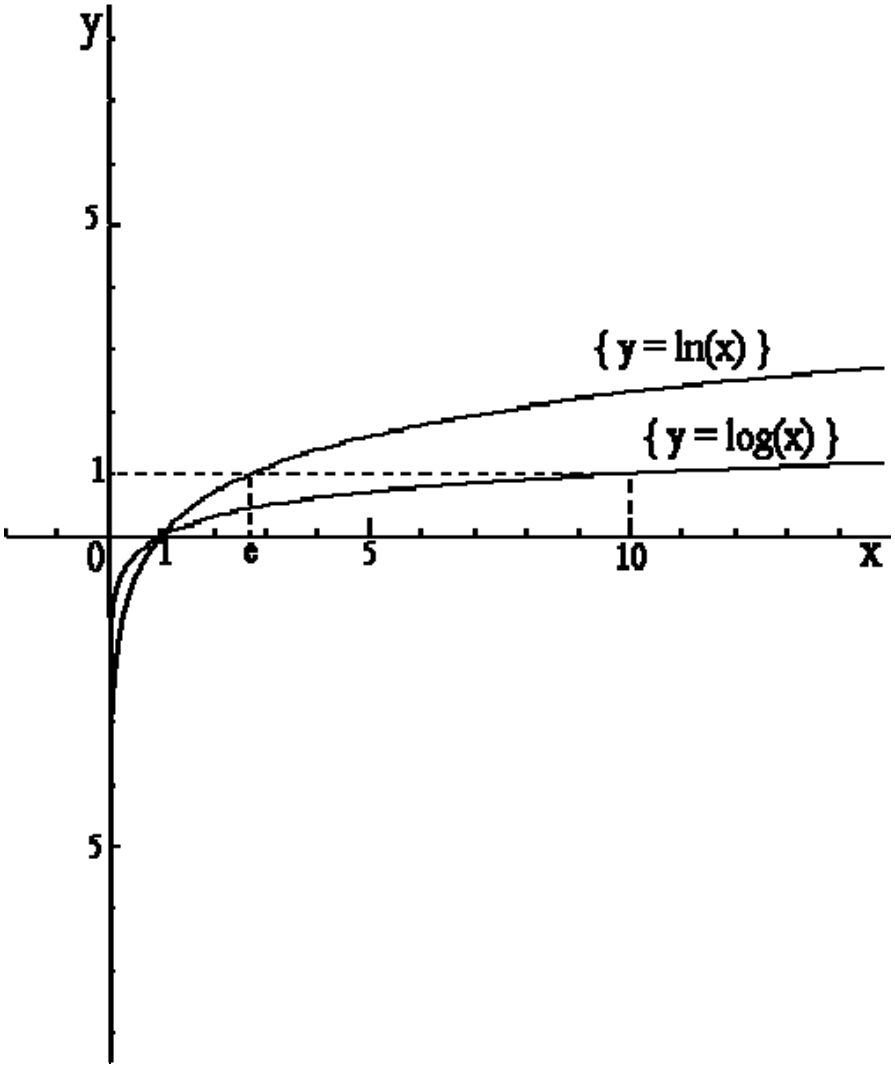
Pour les expressions de la forme : $\frac{\text{Log } x}{x^{\alpha}} (\alpha > 0)$ lorsque $x \to +\infty$ ou bien $x^{\alpha} \text{ Log } x$ quand $x \to 0$

ou bien : $\frac{e^x}{x^{\alpha}} (\alpha > 0)$ ou $x^{\alpha}\, e^{-x}$; il faut utiliser les formules données au cours pour trouver ces limites, à chaque fois où on trouve des expressions de ces types il faut les démontrer.

Tableau de variations

x	0		1		10		+∞
log'(x)	||	+	2,3	+	0,043	+	
log(x)	||	-∞ ↗	0	↗	1	↗	+∞

Courbe représentative

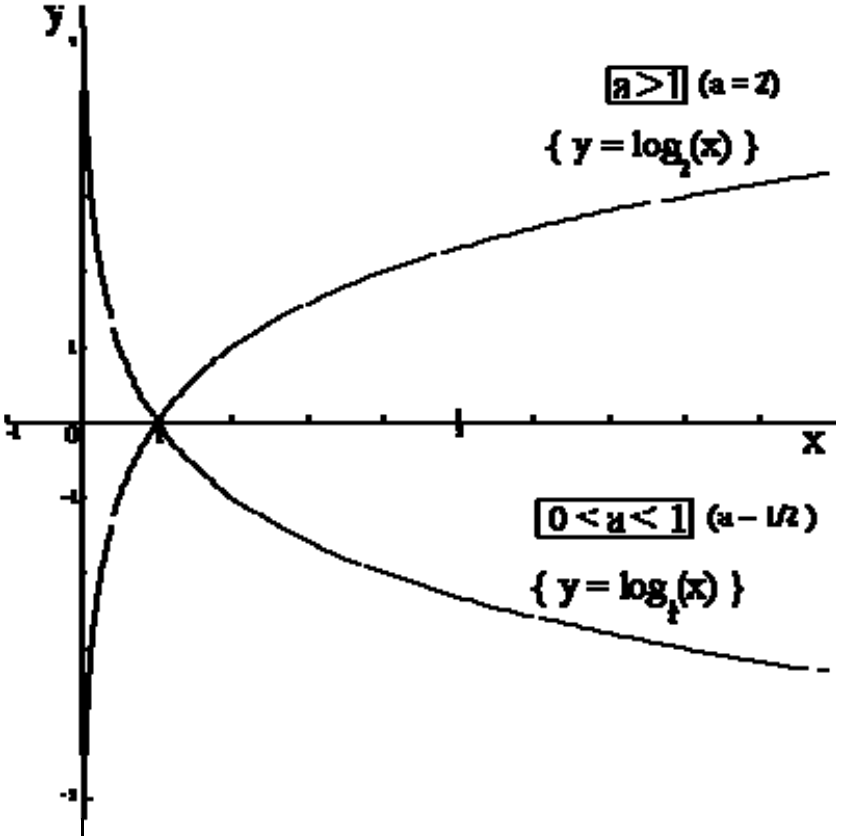


Si **a > 1**, $\log_a$ est une bijection **strictement croissante** de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Si **0 < a < 1**, $\log_a$ est une bijection **strictement décroissante** de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Courbes représentatives

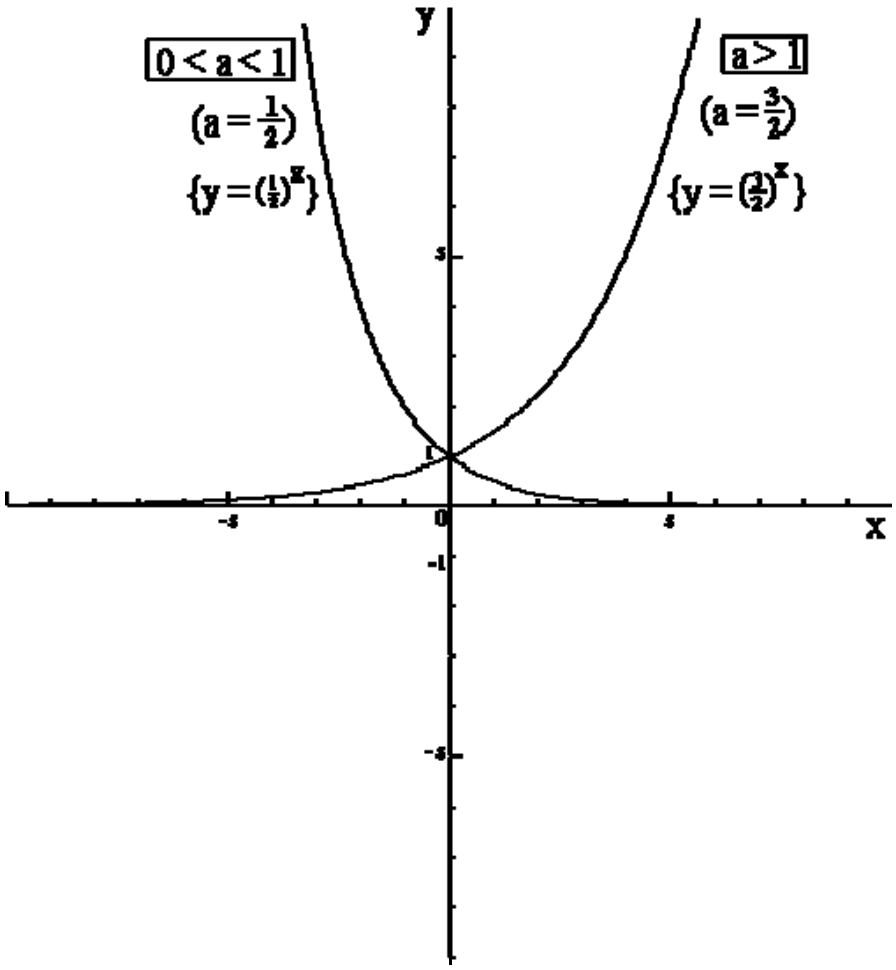
Exemples : a = 2, a = 1/2.



Si **a > 1**, $\exp_a$ est une bijection **strictement croissante** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si **0 < a < 1**, $\exp_a$ est une bijection **strictement décroissante** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemples


0 < a < 1
(a = 1/2)
{y = (1/2)^x}
a > 1
(a = 3/2)
{y = (3/2)^x}
y
x
5
1
0
-1
-5
-5
5

POUR SAVOIR PLUS

Travaux pratiques

Un peu d'histoire :

A la fin du XVI^{è} siècle, le développement du commerce et de la banque pose des problèmes de calcul numériques, aux quels les mathématiciens en renom consacrent une bonne partie de leurs efforts. Par ailleurs, les problèmes de navigation (détermination d'une longitude, de la route la plus courte , …), ainsi que les problèmes d'astronomie, impliquent d'importants calculs. La difficulté de ces calculs « astronomiques » est resté légendaire et a poussé à la découverte de techniques de calcul simplificatrices.

L'idée simple, à la base de ces techniques, est qu'il est plus facile d'additionner que de multiplier.

Sans calculatrice, calculer 697 + 213 et 697 x 213, et vous serez convaincus.

Quelques mathématiciens du début du XVII^{è} siècle ont fabriqué des tables de correspondance qui transforment des produits en sommes c'est à dire qui permettent de calculer un produit ab en faisant une somme a' + b' de la façon suivante :

En face du réel a on trouve un réel a' (appelé le logarithme de a) ;

En face de b on trouve un réel b' ; on calcul a' + b', on cherche ce réel dans le colonne des logarithmes, et en face on lit le produit ab.

La première table de logarithme est due à l'Ecossais Neper les logarithmes sont données avec 7 décimales. Ces logarithmes sont dits ***népériens*** et c'est d'eux que nous allons traiter essentiellement en cours.

En 1620 le Suisse Burgie et l'anglais Briggs en 1624 ont publient chacun de leur côté une table des logarithmes dites décimaux. La table de Briggs donne les logarithmes avec 15 décimales

Exemples d'utilisation de la fonction Log :

Un encadrement utilisé par Neper :

Néper a fait un usuge intensif des inégalités suivantes :

Pour tout $x > 0$, $\frac{x-1}{x} \leq \text{Log } x \leq x - 1$ (*)

En fait Néper parvient cet encadrement par des procédés cinématiques

(utilisation du vitesse d'un point mobile sur un axe, …) .

Questions :

1°/ Supposons que $x > 1$; En utilisant les inégalités des accroissements finis pour la fonction Log sur l'intervalle [1,x] ;

Montrer l'encadrement (*).

2°/Supposons que $0 < x < 1$, soit $\frac{1}{x} > 1$; Montrer que l'encadrement (*) est vrai pour $0 < x < 1$.

Conclure.

4°/ Tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x-1}{x}$ et $g(x) = x - 1$.

Néper prend alors pour approximation de Log x le milieu de l'intervalle $[\frac{x-1}{x}, x-1]$: $\text{Log } x \approx \frac{1}{2}(\frac{x-1}{x} + x - 1)$

d'où $\text{Log } x \approx \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$

Exemple :

- Vérifier que $(0,99)^{36} < 0,7 < (0,99)^{35}$ et que :
  $(0,99)^{35}(0,9995)^{10} < 0,7 < (0,99)^{36}(0,9995)^{9}$.
- Déduire l'encadrement de Néper de Log (0,7).

Un encadrement de $x \mapsto \text{Log}(1+x)$ par des polynômes :

1°/ Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions suivantes :

$x \mapsto \text{Log}(x+1) - x$ et $x \mapsto \text{Log}(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ pour $x > 0$, et déduire l'encadrement :

$x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x$

2°/ Etablir que pour tout x > 0 on a : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leq \text{Log}(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Essayons de généraliser les encadrements précédents ; pour cela, introduisons les fonctions :

$$F_p(x) = \sum_{k=1}^{2p} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \text{et} \quad G_p(x) = \sum_{k=1}^{2p-1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \text{ ; avec } p \in \mathbb{N}^*.$$

3°/ Montrer que pour tout réel x > 0 on a :

- $\frac{1}{1+x} - F_p'(x) = \frac{x^{2p}}{1+x}$ et
- $\frac{1}{1+x} - G_p'(x) = -\frac{x^{2p-1}}{1+x}$.

4°/ Déduisez-en que pour tout réel x > 0 on a : $F_p(x) < \text{Log}(1+x) < G_p(x)$

On veut déterminer un encadrement de Log(1,1) inférieur à 10^{-7}.

- Déterminer le naturel p tel que $G_p(0,1) - F_p(0,1) < 10^{-7}$.
- Calculer alors $F_p(0,1)$ et $G_p(0,1)$.
- Calculer et vérifier sur votre calculatrice.

<u>Autre Exemple d'utilisation de ces encadrements :</u>

<u>Etude de la fonction :</u> $f(x) = \frac{\text{Log } x}{x-1}$; pour $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$.

* Dresser le tableau de variation de f.

* En utilisant l'encadrement :

$F_2(x) < \text{Log}(1+x) < G_2(x)$ pour tout x > 0 ;

montrer que La fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = f(x) = \frac{\text{Log } x}{x-1} \text{ ; pour } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\\ h(1) = 1. \end{cases}$$

est dérivable en 1.

Exemple d'utilisation de la fonction Log pour étudier une suite :

On considère la suite u d définie pour tout naturel n > 0 par :

$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+nk}$; avec k est un entier naturel donné.

1°/ Montrer que pour tout réel x tel que 0 < x < 1 on a :

$$\text{Log}(1+x) < x < \text{Log}(1-x).$$

2°/ En déduire que pour tout n > 0 on a :

$$\text{Log}\left(k+1+\frac{1}{n}\right) < u_n < \text{Log}\left(k+1+\frac{k+1}{n-1}\right)$$

3°/ Déterminer alors la limite de la suite u.

La constante d'Euler :

Soit u la suite définie pour n > 0 par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1°/ Montrer que pour tout n > 0 on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \text{Log}(n+1) - \text{Log}\, n \leq \frac{1}{n}.$$

2°/ En déduire que pour tout n > 0 on a : $u_{n+1} - 1 \leq \text{Log}(n+1) \leq u_n$.

3°/ Déterminer la limite de la suite u.

On considère la suite v définie pour tout n > 1 par :

$$v_n = u_{n+1} - \text{Log}\, n.$$

4°/ On pose $f(x) = \frac{1}{x} - \text{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)$ et $g(x) = -\frac{1}{x+1} + \text{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)$;

pour tout x > 0.

- Dresser les tableaux de variations de f et de g.
- Déduire que pour tout n > 0 on a : $0 < f(n) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

- Vérifier que $v_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)$. En déduire que v est une suite croissante et que pour tout $n > 1$ on a :

$$f(1) < v_n < 1 - \frac{1}{n}.$$

- Déduire que la suite v est majorée et qu'elle est convergente vers un réel λ dont on donnera un encadrement.

Commentaire :

Le réel λ s'appelle la constante d'Euler ; on trouve bien que

$\lambda \approx 0{,}5772156649$.

En 1734-1735 Euler a proposé 16 décimales de l'écriture de cette constante.

Remarque : jusqu'à maintenant on ne sait pas si λ est rationnel ou irrationnel !

Exemples d'études simultanées de suites et de fonctions :

⊕ On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x - \operatorname{Log} x}$.

1°/ • Déterminer l'ensemble de définition de f.

- Dresser le tableau de variation de f.

2°/ Soit x un réel de $[1, +\infty[$ et u la suite définie pour tout $n > 0$ par :

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(\operatorname{Log} x)^k}{x^k}.$$

Calculer, en justifiant son existence, la limite de u.

Interpréter graphiquement ce résultat.

⊕ Soit θ un réel de $]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$, et on considère la suite définie pour tout $n > 0$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Log}\left(2\cos\frac{\theta}{3^k} - 1\right)$.

1°/ • Vérifier que pour tout $n > 0$ on a : $2\cos\frac{\theta}{3^n} - 1 > 0$.

- Montrer que, pour tout réel x, on a :

$\cos 3x = (2\cos 2x - 1)\cos x$.

- En déduire que : $u_n = \text{Log}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) - \text{Log}\left(\cos\frac{\theta}{2.3^n}\right)$.

2°/ • Déterminer la limite de la suite u qu'on note $f(\theta)$.

- Etudier les variations de f sur $]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}[$ et tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Fonctions exponentielles :

Exemple d'étude d'une famille de fonctions :

Pour tout $\alpha > 0$, on note f_α la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$$

et $f_\alpha(0) = 0$. On note $f_0(x) = e^{-x}$; pour tout $x \geq 0$.

On note ξ_α la courbe de la fonction f_α dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A°-1°/a) Etudier les fonctions f_0 et f_1 et tracer leurs courbes ξ_0

et ξ_1

b) Préciser leur position relative l'une par rapport à l'autre.

2°/ Supposons que $\alpha \neq 1$. Etudier la dérivabilité de f_α en 0.

Etudier la fonction f_α .

3°/ Préciser la position de ξ_0 et ξ_α pour $x \in]0,+\infty[$.

4°/ Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$.

Préciser la position de ξ_α et ξ_β .

5°/ Démontrer que toutes les courbes ξ_α passent par un même point et déterminer une équation de la tangente à ξ_α en ce point.

6°/ Représenter les courbes $\xi_{\frac{1}{2}}$ et ξ_e dans le même repère.

On suppose maintenant que α est un entier naturel et notons par la suite $\alpha = n$.

Soit la fonction F_n qui est la primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction f_n tel que $F_n(0)= 0$

1°/ Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$ pour : $x \in]0,+\infty[$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F_0(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)$.

2°/ Montrer que $F_n(x) = - x^n e^{-x} + n F_{n-1}(x)$.

3°/ A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la fonction F_n admet une limite réelle en $+\infty$. Notons u_n cette limite.

a) Déterminer une relation entre u_n et u_{n-1}.

b) Pour $n > 0$, étudier la fonction F_n et l'allure de la courbe de la fonction F_3.

c) Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $\frac{F_n(1)}{n!} = \frac{-e^{-1}}{n!} + \frac{F_{n-1}(1)}{(n-1)!}$.

d) En d déduire que pour tout n on a : $\frac{F_n(1)}{n!} = 1 - e^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$.

e) En utilisant une majoration de $f_n(t)$ sur $[0,1]$ pour $n > 0$;
Montrer que $0 \leq F_n(1) \leq \frac{1}{e}$.

f) En déduire la limite de la suite v définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

Equations, Puissances et Exponentielles :

Soient a et α deux réels tels que $\alpha > 1$.

I°) On se propose de résoudre dans $]0,+\infty[$ l'équation

(E) : $a^x = x^\alpha$.

1°/ Montrer que (E) est équivalente à : $a^x x^{-\alpha} = 1$.

2°/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = a^x x^{-\alpha}$.

Calculer f'(x).

3°/ * Dans le cas où $\alpha \leq 0$; l'équation (E) admet-elle une solution et une seule ?

* Supposons que $\alpha > 0$; Dresser le tableau de variation de f .

Déterminer le minimum m de cette fonction.

* Déduisez le nombre de solutions de l'équation (E).

II°) On considère maintenant l'équation (E') : $a^{(a^x)} = x$.

1°/Montrer que l'équation (E') est équivalente à : $a^x = x$.

2°/ En utilisant des résultats de I°) , déterminer le nombre des solutions de l'équation (E').

****EXERCICE :**

Etudier la fonction f : $x \mapsto x^x$ et tracer sa courbe dans un repère orthonormé.

Etude de la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Une erreur serait de dire : « puisque les suites $\left(\frac{1}{n+1}\right), \left(\frac{1}{n+2}\right) \ldots \left(\frac{1}{2n}\right)$ ont pour limite zéro, alors il en est de même de la suite u qui est la somme de celle –ci ».

L'erreur résulte du fait que u n'est pas la somme d'un nombre précis de suites : En effet, le nombre de termes dans la somme donnant u_n n'est pas constant, il augmente avec n.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3 .

b) Montrer que, pour tout réel x > 0 , on a : $\frac{1}{x+1} \leq \text{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

c) Déduisez-en que, pour tout n > 0, on a :

$$U_n \leq \text{Log}\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \ldots \frac{2n}{2n-1}\right) \leq u_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n}$$

d'ou : $u_n \leq \text{Log}\, 2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$.

d) Montrer que la suite u est convergente et donner sa limite.

Irrationalité du nombre e :

On se propose de donner une valeur approchée du nombre e :

a) Pour tout naturel n on définit le polynôme P_n par :

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Montrer que pour tout naturel n et pour tout x > 0, on a :

$$0 < e^x - P_n(x) < \frac{x_{n+1}}{(n+1)!}\, e^x .$$

Indication : Faites un raisonnement par récurrence après avoir remarqué que pour tout n > 0 ; on a P_n ' = P_{n-1}.

b) Sachant que 0 < e < 3 , déduisez un majorant de l'erreur commise lorsqu'on remplace e par $P_n(1)$. Qu'obtient-on avec

n = 5 ?

Les résultats précédents montrent que e est strictement compris entre 2 et 3 ; ce n'est donc pas un naturel ; nous allons montrer que ce n'est pas non plus un rationnel en raisonnant par l'absurde.

Supposant que e est rationnel et posons $e = \frac{a}{b}$ avec a et b naturels.

D'après les questions précédentes, on a alors, pour tout

naturel n :

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{e}{(n+1)!}$$

d'ou : $$0 < n!\, \frac{a}{b} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{e}{n+1}.$$

Prenons $n \geq b$; il est claire alors que $\frac{n!\,a}{b}$ est un entier naturel qui est le produit de deux naturels.

1°/ Montrer que : $n!\,(1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!})$ est naturel.

Indication : vous pouvez vérifier que pour tout naturel k tek que

$1 \leq k \leq n$ on a : n ! est un multiple de k.

2°/ En prenant n assez grand, montrer que l'on a une contradiction.

Suites de type : $u_{n+1} = f(u_n)$

La donné d'un réel u_0 et d'une condition : Pour tout naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$; où f est une fonction , **ne définissait pas nécessairement** une suite.

Exemple : Montrer que la donné de $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \text{Log}\, u_n$, ne permettent pas de définir une suite u.

- Si f est une fonction définie sur au moins un intervalle I dont l'image est f(I) est incluse dans I, c'est-à-dire que pour tout x de I on a f(x) l'est aussi.

- Si u_0 appartient à I ; Alors on peut définir une suite u de premier terme u_0 et telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. En effet, s'il en est ainsi, $u_1 = f(u_0) \in I$ alors u_1 a une image par f , en posant $u_2 = f(u_1)$, on a : $u_2 \in I$, et a son tour u_2 a une image par f …On peut de cette manière associer à chaque naturel n un réel et un seul , u_n , donc définir une suite , et cette suite est évidement telle que

$u_{n+1} = f(u_n)$.

Pour avoir ces conditions suffisantes sont remplies, il est très important de dresser le tableau de variation de f, et de tracer sa représentation graphique qui permet d'obtenir une représentation graphique de la suite u

Solutions de l'équation : f(x) = x

on considère la fonction f définie sur

$$]0,+\infty[\text{ par } f(x) = x - 4 + \frac{1}{4}\operatorname{Log} x .$$

a) Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution et une

seule dans IR.

b) Montrer que cette solution est dans l' intervalle $]0,+\infty[$.

On note α cette solution et on se propose d'en calculer une valeur approchée à 10^{-3} près. Pour cela, on considère la fonction g définie par $g(x) = 4 - \frac{1}{4}\operatorname{Log} x$;

On a $g(\alpha) = \alpha$.

L'idée est de construire une suite u convergente et telle que, pour tout n, $u_{n+1} = g(u_n)$; la limite ℓ vérifie $g(\ell) = \ell$; comme α est le seul réel tel que $g(\alpha) = \alpha$; on a : $\alpha = \ell$; les valeurs u_n fourniront les approximations de α

1°/I est l' intervalle [3,4]. Montrez que l'image par g de l'intervalle I est incluse dans I ; déduisez alors que l'on peut définir une suite u par $u_0 = 3$ et la condition , pour tout naturel n ,$u_{n+1} = g(u_n)$.

2°/Montrer que pour tout x dans I , $\left|g'(x)\right| \leq \frac{1}{12}$.

3°/ a) En appliquant les inégalités des accroissements finis à g , g' et l'intervalle [3,4] ; Montrer que pour tout naturel n on a :

$$\left|g(u_n) - g(\alpha)\right| \leq \frac{1}{12}\left|u_n - \alpha\right|$$

b) Déduisez-en que pour tout naturel n on a :

$$\left|u_n - \alpha\right| \leq \frac{1}{12^n}\left|u_0 - \alpha\right| .$$

4°/ Montrer que la suite u converge vers α .